通信理論 I
— FM 信号に及ぼす雑音の影響 —

山崎　浩一

目的：伝送路上で白色性の雑音が加わった FM 信号の FM 復調器出力における信号電力対雑音電力比（SN 比）$(S/N)_{\rm out}$，および，FM 復調器の復調器利得を求める．

ここで考えるシステムの構成を図１に示す（復調器は図２を参照）．簡単のために，変調信号 $f_{\rm s}(t)$（周波数スペクトル $F_{\rm s}(\omega)$ を図３に示す）を正弦信号とし，それで搬送波 $f_{\rm c}(t)$ を FM 変調する場合を考える．また，伝送路上で加わる白色雑音 $n(t)$ の電力密度スペクトル $N(\omega)$ を $N_0/2$（図４参照）とする．

$$\begin{aligned} f_{\rm s}(t) &= A_{\rm s}\cos\ \omega_{\rm s}t \\ f_{\rm c}(t) &= A_{\rm c}\cos\ \omega_{\rm c}t \\ N(\omega) &= \frac{N_0}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

ただし，$\omega_{\rm c} \gg \omega_{\rm s}$ である．このとき，FM 信号 $f_{\rm FM}(t)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} f_{\rm FM}(t) &= A_{\rm c}\cos\left(\omega_{\rm c}t + \frac{k_{\rm FM}A_{\rm s}}{\omega_{\rm s}}\sin\ \omega_{\rm s}t\right) \\ &= A_{\rm c}\cos\left(\omega_{\rm c}t + \alpha(t)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，$\alpha(t)$ は FM 信号の位相関数において情報成分を含む部分である．この FM 信号の変調指数は $\beta = k_{\rm FM}A_{\rm s}/\omega_{\rm s}$ であり，これを用いて FM 信号の伝送帯域幅（角周波数）は $B = 2(\beta+1)\omega_{\rm s}$ である．FM 信号の周波数スペクトル密度 $F_{\rm FM}(\omega)$ を模式的に図５に示す．

受信機では，白色雑音が加わった FM 信号を，まず，帯域通過型フィルタ (BPF) に通し，信号帯域外の雑音を除去する．この過程で信号成分はすべて通過するので，通過後の雑音を $n_{\rm in}(t)$（その電力密度スペクトル $N_{\rm in}(\omega)$ を図６に示す）とおくと BPF 出力は $f_{\rm FM}(t) + n_{\rm in}(t)$ となる．この時点での信号電力 $S_{\rm in}$ と雑音電力 $N_{\rm in}$ は，

$$\begin{aligned} S_{\rm in} &= \overline{f_{\rm FM}(t)^2} = A_{\rm c}^2/2 \\ N_{\rm in} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} N_{\rm in}(\omega)d\omega = \frac{N_0 B}{2\pi} \end{aligned} \tag{3}$$

となる．したがって，FM 復調器入力端の SN 比 $(S/N)_{\rm in}$ が次式のように求めることができる．

$$(S/N)_{\rm in} = \frac{\pi A_{\rm c}^2}{N_0 B} \tag{4}$$

つづいて FM 復調器出力における SN 比を順を追って調べていこう．

$n_{\rm in}(t)$ は，角周波数 $\omega_{\rm c}$ の直交する二つの正弦関数を図７の電力密度スペクトルをもつ基底帯域の二つの独立な雑音 $n_{\rm C}(t)$，$n_{\rm S}(t)$ で DSB 変調した形で表すことができる（図６参照）．このとき，直交する二つの正弦関数の一つを FM 信号 $f_{\rm FM}(t)$ と同じ位相の正弦関数（すなわち $\cos\left(\omega_{\rm c}t + \alpha(t)\right)$），他方をこれと直交する成分（$\sin\left(\omega_{\rm c}t + \alpha(t)\right)$）にとると便利である．

$$n_{\rm in}(t) = n_{\rm C}(t)\cos\left(\omega_{\rm c}t + \alpha(t)\right) - n_{\rm S}(t)\sin\left(\omega_{\rm c}t + \alpha(t)\right) \tag{5}$$

この様子をベクトル表示により図８（FM 信号），図９（雑音成分），図１０（雑音が加わった FM 信号）に示す．この結果，BPF 出力は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} &f_{\rm FM}(t) + n_{\rm in}(t) \\ &\quad = \left(A_{\rm c} + n_{\rm C}(t)\right)\cos\left(\omega_{\rm c}t + \alpha(t)\right) \\ &\qquad - n_{\rm S}(t)\sin\left(\omega_{\rm c}t + \alpha(t)\right) \\ &\quad = \rho(t)\cos\left\{\omega_{\rm c}t + \alpha(t) + \phi_{\rm n}(t)\right\} \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，$\rho(t)$ は BPF 出力の振幅，$\phi_{\rm n}(t)$ は位相ゆらぎであり，それぞれ，

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sqrt{(A_{\rm c} + n_{\rm C}(t))^2 + n_{\rm S}(t)^2} \\ \phi_{\rm n}(t) &= \tan^{-1}\left(\frac{n_{\rm S}(t)}{A_{\rm c} + n_{\rm C}(t)}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

である．この時点では，振幅 $\rho(t)$ が雑音の影響を受けてゆらいでいるが，FM 信号の振幅には情報は乗っていないので振幅制限器を通すことによりその影響を除去する．その結果，得られた信号は，

$$\hat{f}_{\rm FM}(t) + \hat{n}_{\rm in}(t) = A\cos\left(\omega_{\rm c}t + \alpha(t) + \phi_{\rm n}(t)\right) \tag{8}$$

となる．ただし，A は定数である．式 (5) において，情報は $\alpha(t)$ に含まれ，$\phi_{\rm n}(t)$ はそれを撹乱する雑音成分である．FM 信号ではその角度を時間微分することにより情報を取り出すことができる．

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha(t) + \phi_{\rm n}(t)\right) = k_{\rm FM}A_{\rm s}\cos\ \omega_{\rm s}t + \phi'_{\rm n}(t) \tag{9}$$

ただし，$'$ は，時間微分を表す．この結果，情報 $f_{\rm s}(t)$ が取り出せたので，最後に LPF を通過させることにより信号帯域外の雑音を除去する．これで，復調器出力の SN 比を求めるために必要な信号成分 $\tilde{f}_{\rm s}(t)(= k_{\rm FM}A_{\rm s}\cos\ \omega_{\rm s}t)$ と雑音成分 $n_{\rm out}(t)(= \phi'_{\rm n}(t))$ を求めることができた．

まず，式 (9) より信号成分の電力 $S_{\rm out}$ は，

$$S_{\rm out} = \overline{\tilde{f}_{\rm s}(t)^2} = \frac{k_{\rm FM}^2 A_{\rm s}^2}{2} \tag{10}$$

となる．

つぎに，雑音電力を求める．ここでは，復調器入力における SN 比が高い（$A_{\rm c} \gg n_{\rm C}(t)$, $n_{\rm S}(t)$）場合を考える．このとき，雑音成分 $\phi_{\rm n}(t)$ は，次のように近似できる．

$$\phi_{\rm n}(t) = \tan^{-1}\left(\frac{n_{\rm S}(t)}{A_{\rm c} + n_{\rm C}(t)}\right) \approx \frac{n_{\rm S}(t)}{A_{\rm c}} \tag{11}$$

したがって，雑音成分 $\phi_{\rm n}(t)$ の電力密度スペクトル $N_\phi(\omega)$ は，

$$N_\phi(\omega) \approx \frac{N_{\rm S}(\omega)}{A_{\rm c}^2} \tag{12}$$

となる．つぎに，時間微分の操作は周波数領域では $j\omega$ を乗じることになる．この伝達関数を $H_{d/dt}(\omega)$ と書くと，$H_{d/dt}(\omega) = j\omega$ である．したがって，時間微分のあとの雑音 $\tilde{N}_{\rm s}(\omega)$ は，

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\rm s}(\omega) &= \left|H_{d/dt}(\omega)\right|^2 N_\phi(\omega) \\ &\approx \begin{cases} \omega^2 N_0/A_{\rm c}^2 & |\omega| \le B/2 \\ 0 & |\omega| > B/2 \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

となる（図１１参照）．最後の LPF では情報 $f_{\rm s}(t)$ の最大角周波数である $\omega_{\rm s}$ までの周波数成分が通過する．したがって，$|\omega| > \omega_{\rm s}$ の雑音成分は全て除去される．最終的に，FM 復調器出力における雑音 $n_{\rm out}(t)$ の電力密度スペクトル $N_{\rm out}(\omega)$ は，

$$N_{\rm out}(\omega) = |H_{\rm LPF}(\omega)|^2 \tilde{N}_{\rm s}(\omega) = \begin{cases} \omega^2 N_0/A_{\rm c}^2 & |\omega| \le \omega_{\rm s} \\ 0 & |\omega| > \omega_{\rm s} \end{cases} \tag{14}$$

となる（図１２参照）．これより，復調器出力における雑音電力 $N_{\rm out}$ は，

$$\begin{aligned} N_{\rm out} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} N_{\rm out}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{\rm s}}^{\omega_{\rm s}} \frac{\omega^2 N_0}{A_{\rm c}^2} d\omega \\ &= \frac{N_0 \omega_{\rm s}^3}{3\pi A_{\rm c}^2} \end{aligned} \tag{15}$$

$$(S/N)_{\rm out} = \frac{3\pi A_{\rm c}^2 A_{\rm s}^2 k_{\rm FM}^2}{2 N_0 \omega_{\rm s}^3} \tag{16}$$

となる．

以上で FM 復調器の入出力端における SN 比を求めることができた．最後に，式 (4) と (16) より FM 復調器の復調器利得を求めると，

$$\frac{(S/N)_{\rm out}}{(S/N)_{\rm in}} = \frac{3}{2}\left(\frac{A_{\rm s} k_{\rm FM}}{\omega_{\rm s}}\right)^2 \frac{B}{\omega_{\rm s}} = 3\beta^2(\beta+1) \tag{17}$$

となる．式 (17) の展開において，$A_{\rm s} k_{\rm FM}/\omega_{\rm s} = \beta$，$B/\omega_{\rm s} = 2(\beta+1)$ の関係を用いた．これより，たとえば変調指数 $\beta = 5$ の FM 信号では復調器において SN 比が 450 倍改善されることがわかる．

ここでは，復調器の入力端における SN 比が十分に大きいと仮定して解析を行ってきた．このような場合では弱い信号（雑音）が強い信号（情報成分）に抑圧されることがわかる．これをキャプチャ効果といい．逆に，復調器の入力端の SN 比が低い場合には情報成分が雑音成分により抑圧され，ほとんど情報を再生できなくなる．その境目をしきいち（スレッショルド）という．すなわち，FM 信号では，復調器の入力端の SN 比がスレッショルドより高ければ良好な情報の再生ができるが，スレッショルド以下では検波器出力の SN 比は急激に劣化する．これを，スレッショルド効果という．