

通信理論 I 理解度チェック

第3回 (信号解析-2: 指数関数によるフーリエ級数展開)

1. オイラーの関係式を記せ.
2. 三角関数によるフーリエ級数展開 (定義は, 下記枠内) をオイラーの関係式を用いて指数関数によるフーリエ級数展開に変形せよ. このとき, $e^{jn\omega_0 t}$ の係数 c_n を三角関数でフーリエ級数展開した場合の $\cos n\omega_0 t$ の係数 a_n および $\sin n\omega_0 t$ の係数 b_n を用いて表せ.

三角関数によるフーリエ級数展開: 関数 $f(t)$ は周期 T の周期関数.

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

ただし, $\omega_0 = 2\pi/T$ とし,

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

である.

3. 前設問の結果をふまえて指数関数によるフーリエ級数展開の定義を記せ.
4. 指数関数によるフーリエ級数展開では負の角周波数成分 ($-n\omega_0$) が現れるが, これは三角関数を指数関数で表すために生じるもので物理的な意味があるわけではないことに注意せよ. 負の周波数成分は, 角周波数 $n\omega_0$ の三角関数 (正弦および余弦関数) が $e^{jn\omega_0 t}$ と $e^{-jn\omega_0 t}$ で与えられることによる.
5. ある周期関数 $f(t)$ を指数関数によりフーリエ級数展開したときの係数 (フーリエ係数) をその関数の周波数スペクトルという. これを極形式表示したとき ($c_n = |c_n|e^{j\theta_n}$) の $|c_n|$, θ_n をそれぞれ振幅スペクトル, 位相スペクトルという.
6. 前設問の $|c_n|$, θ_n を, それぞれ, 三角関数でフーリエ級数展開したときの $\cos n\omega_0 t$ の係数 a_n および $\sin n\omega_0 t$ の係数 b_n を用いて表せ. この結果より, $|c_n|$, θ_n がそれぞれ角周波数に対し偶関数, 奇関数であることを確認せよ.
7. 次式で定義される時間関数を指数関数によりフーリエ級数展開せよ. また, 「理解度チェック2」の最終項目の結果と比較することにより, 上で調べてきたそれぞれの関係が成り立っていることを確認せよ.

$$\begin{aligned} f(t) &= t & -0.5 \leq t < 0.5 \\ f(t) &= f(t+1) \end{aligned} \tag{3-1}$$