

情報数学 I 理解度チェック

第3回: フーリエ級数 (周期関数, 三角関数によるフーリエ級数展開)

定義 1 (周期関数)

関数 $f(t)$ が全ての t に対して,

$$f(t) = f(t + T) \quad (1)$$

を満たすとき, この関数 $f(t)$ を**周期関数**と言う. ここで, 上式を満たす最小の T をこの関数の**周期**のという.

1 正弦波関数 $g(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ の周期 T が $2\pi/\omega$ であることを確認せよ. ここで, t の単位を時刻 [sec] とするとき ω を**角周波数** (単位は, [rad/sec]) といい, $f = 1/T$ を**周波数**とよびその単位は [cycles/sec=Hz] である. 明らかに, 周波数 f と角周波数 ω との間には $\omega = 2\pi f$ の関係が成り立つ.

2 教科書の問題 1.4 を解け.

定義 2 (三角関数によるフーリエ級数展開)

関数 $f(t)$ が周期 T の周期関数であるとき, この関数は, 以下のように三角関数の和で表すことができ, これを関数 $f(t)$ の三角関数によるフーリエ級数展開と言う.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\} \quad (2)$$

ただし, $\omega_0 = 2\pi/T$ である.

3 $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$ と表すことができることを確認せよ ($n \geq 1$).
ただし, $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$. この結果より, $C_0 = \frac{1}{2}a_0$ とおくと定義 2 の式 (2) を以下のように書き換えることができる.

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad (3)$$

このとき, C_0 を $f(t)$ の**直流成分** (D.C. 成分), 角周波数 ω_0 を**基本角周波数**とよびその成分を**基本波成分**, 角周波数 ω_n の正弦波成分を**第 n 次の高調波成分**と呼ぶ. また, その係数 C_n および角 θ_n を, それぞれ, n 次の**高調波振幅**, **位相角**とよぶ.