情報数学Ⅰ　理解度チェック

第 4 回:フーリエ級数 (三角関数によるフーリエ級数展開－フーリエ係数の決定)

定義 1 (関数の直交性と直交関数系)
関数の集合 $\Phi = \{\phi_k(t), k = 0, 1, 2, ...\}$ における任意の二つの関数 $\phi_m(t),\ \phi_n(t) \in \Phi$ が次の関係を満たすとき，この関数の集合 Φ は区間 $a < t < b$ において**直交関数系**をなすと言う．

$$\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ r_n, & m = n \end{cases} \tag{1}$$

1 定数と正弦波関数による集合 $\{1, \cos\omega_0 t,\ \cos 2\omega_0 t,\ \cos 3\omega_0 t,\ ..., \sin\omega_0 t,\ \sin 2\omega_0 t,\ \sin 3\omega_0 t,\ ...\}$ が区間 $-T/2 < t < T/2$ において直交関数系をなすことを示せ．ただし，$T = 2\pi/\omega_0$ である．

2 周期 T の周期関数 $f(t)$ を式 2 のようにフーリエ級数展開したときのフーリエ係数が式 3 のように与えられることを確認せよ．ただし，$\omega_0 = 2\pi/T$ である．

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_o t\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t dt \end{aligned}\right\} \tag{3}$$