

情報数学Ⅰ 理解度チェック

第6回:偶関数と奇関数

定義 1 (偶関数・奇関数)

関数 $f(t)$ が,

$$f(-t) = f(t) \quad (1)$$

を満たすとき, この関数 $f(t)$ を偶関数と言い,

$$f(-t) = -f(t) \quad (2)$$

であれば, 奇関数と言う.

- 1 偶関数は縦軸に対して対称であり, 奇関数は原点に対して対称である.
- 2 偶関数および奇関数の例をそれぞれ5こ挙げよ.
- 3 偶関数と偶関数の積または奇関数と奇関数の積は偶関数となり, 偶関数と奇関数の積が奇関数となることを示せ.
- 4 いかなる関数 $f(t)$ も偶関数 $f_e(t)$ と奇関数 $f_o(t)$ の和で与えられる.

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \quad (3)$$

このとき, 偶関数 $f_e(t)$ (偶成分) と奇関数 $f_o(t)$ (奇成分) は次式で与えられることを示せ.

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad (4)$$

- 5 4 の関係より, 次式を偶成分と奇成分に分けよ.

$$f(t) = 3t + t^2 + t^3 \cos t + \sin t^2$$

- 6 関数 $f(t)$ が偶関数であるとき次の関係が成り立つ.

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad (5)$$

一方, 関数 $f(t)$ が奇関数であるときは次式が成り立つ.

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0 \quad (6)$$

- 7 周期関数 $f(t)$ が偶関数であるとき, それを三角関数でフーリエ級数展開したときの $\sin$ のフーリエ係数 b_n は全てゼロである. 一方, 周期関数 $f(t)$ が奇関数であるときは, $\cos$ のフーリエ係数 a_n は全てゼロである. このことを, 6 の結果を用いて示せ.