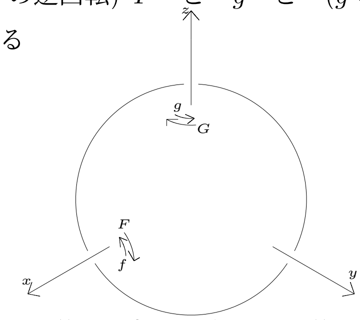
例えば x 軸を軸とする回転 f と z 軸を軸とする回転 g があるとする (ほぼどんな回転でもよい). このとき,

$$f \quad \text{と} \quad (f\text{ の逆回転})\ F \quad \text{と} \quad g \quad \text{と} \quad (g\text{ の逆回転})\ G$$

の 4 つを組合せた回転の集合を考える



例えば Fgf で, まず回転 f を行ないその後で回転 g を行ない最後に回転 F を行なう, という回転の合成を表す (これも回転になる). f の後に F を行なうと, または F の後に f を行なうと相殺されて何もないのと同じなので, f と F が隣り合う回転は考えなくてよく, 同じく g と G が隣り合う回転も考えなくてよい. このときこれらの回転全体 (無限個) を,

無回転のみ	E	$\leftarrow$ 1 つだけ
最後に f を行なう回転の集合	W_f	$\leftarrow$ 回転全体の約$\frac{1}{4}$
最後に F を行なう回転の集合	W_F	$\leftarrow$ 回転全体の約$\frac{1}{4}$
最後に g を行なう回転の集合	W_g	$\leftarrow$ 回転全体の約$\frac{1}{4}$
最後に G を行なう回転の集合	W_G	$\leftarrow$ 回転全体の約$\frac{1}{4}$

の 5 つ (実質的に 4 つ) に分ける. ここで W_F の回転に f を付加すると最後の F と相殺されるので, 回転 F は無回転になり, 最後の F の直前も F であった回転は W_F の回転になり, 最後の F の直前が g か G であった回転は W_g か W_G の回転になる. つまり付加した回転の集合は

$$\begin{array}{lcccccccl}
f\cdot W_F & = & E & \cup & W_F & \cup & W_g & \cup & W_G \qquad \leftarrow \text{回転全体の約}\tfrac{3}{4} \\
(\ f\cdot F & = & \text{無回転} & & & & & &) \\
(\ f\cdot FFw & = & & & Fw & & & &) \\
(\ f\cdot Fgw' & = & & & & & gw' & &) \\
(\ f\cdot FGw'' & = & & & & & & & Gw''\ )
\end{array}$$

となり, W_f と fW_F で回転全体となる. 同様に W_gと gW_G でも回転全体となる. つまり, 回転全体を 5 つ (実質 4 つ) に分けたうちの 2 つからそのうちの 1 つを回転して回転全体を作ることができ, 別の 2 つからも同じことができる. この奇妙さがパラドックスの本質である.

球面上の点を無限個うまく選んでそれらの回転で球面のほとんどの点 (どの回転でも軸上とならない点) を網羅させることができる (たくさん選ぶので, 実は「選択公理」という概念が必要である).

$$\begin{array}{ccccccc l}
x & x' & x'' & x''' & x'''' & \cdots & X & \leftarrow \text{選んだ集合} \\
f(x) & f(x') & f(x'') & f(x''') & f(x'''') & \cdots & f(X) & \\
F(x) & F(x') & F(x'') & F(x''') & F(x'''') & \cdots & F(X) & \\
g(x) & g(x') & g(x'') & g(x''') & g(x'''') & \cdots & g(X) & \\
G(x) & G(x') & G(x'') & G(x''') & G(x'''') & \cdots & G(X) & \\
ff(x) & ff(x') & ff(x'') & ff(x''') & ff(x'''') & \cdots & ff(X) & \\
gf(x) & gf(x') & gf(x'') & gf(x''') & gf(x'''') & \cdots & gf(X) & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

上での回転の分類を用いて球面上 (のほとんど) の点を 5 つ (実質 4 つ) に分けると, 同様のことが成立する.

選んだ集合	X	$\leftarrow$ 小さい
選んだ集合に W_f の回転を施した集合の和集合	$W_f\,(X)$	$\leftarrow$ 球面 (のほとんど) の約$\frac{1}{4}$
選んだ集合に W_F の回転を施した集合の和集合	$W_F\,(X)$	$\leftarrow$ 球面 (のほとんど) の約$\frac{1}{4}$
選んだ集合に W_g の回転を施した集合の和集合	$W_g\,(X)$	$\leftarrow$ 球面 (のほとんど) の約$\frac{1}{4}$
選んだ集合に W_G の回転を施した集合の和集合	$W_G(X)$	$\leftarrow$ 球面 (のほとんど) の約$\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{lcccccccl}
f\cdot W_F(X) & = & X & \cup & W_F(X) & \cup & W_g(X) & \cup & W_G(X) \qquad \leftarrow \text{球面 (のほとんど) の約}\tfrac{3}{4} \\
(\ f\cdot F\ (x) & = & x & & & & & &) \\
(\ f\cdot FFw\ (x) & = & & & Fw(x) & & & &) \\
(\ f\cdot Fgw'\ (x) & = & & & & & gw'(x) & &) \\
(\ f\cdot FGw''(x) & = & & & & & & & Gw''(x)\ )
\end{array}$$

つまり $W_f(X)$ と $fW_F(X)$ で球面 (のほとんど) となり, 同様に $W_g(X)$ と $gW_G(X)$ でも球面 (のほとんど) となる. つまり, 球面 (のほとんど) を 5 つ (実質 4 つ) に分けたうちの 2 つからそのうちの 1 つを回転して球面 (のほとんど) を作ることができ, 別の 2 つからも同じことができる.

少し工夫すると「ほとんど」を「全体」にすることができるので, 1 つの球面から 2 つの球面を回転のみで (拡大縮小なしで) 作ることができる. よって 1 つの球体 (球面の中を詰めたもの) から 2 つの球体を作ることができる. このことを繰り返せば, 小さな物体から大きな物体を (拡大縮小なしで) 作ることができる.